



Betrouwbaarheid en faalkansverdelingen



ir. Martine van den Boomen MBA

Colibri Advies

31-5-2017



Basistheorie betrouwbaarheid en faalkansverdelingen

Auteur: Martine van den Boomen - Colibri Advies BV

Copyright © 2017 Colibri Advies BV

Materiaal mag uitsluitend voor niet-commerciële doeleinden worden gebruikt indien bronvermelding wordt toegepast. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. De inhoud van dit document is met zorg samengesteld. Colibri Advies BV en de auteur aanvaarden echter geen aansprakelijkheid bij gebruik/toepassing van deze tekst.

Reacties zijn welkom op: vandenboomen@colibri-advies.nl



Voorwoord

In dit document leggen we de we de basistheorie van betrouwbaarheid en faalkansverdelingen uit. Het is een aanvulling op een eerdere uitgave: Praktijkgericht rekenen aan de beschikbaarheid en betrouwbaarheid van assets en assetsystemen. We leggen uit wat betrouwbaarheid is, cumulatieve faalkans, faalkans per jaar en faaltempo. We laten zien hoe we deze grootheden kunnen afleiden door naar de overleving van een groep objecten te kijken. In essentie is het niet meer dan tellen. Daarna maken we de stap naar vergelijkingen die anderen al voor ons hebben afgeleid. Als je de basis begrijpt, schrik je niet meer van bijvoorbeeld een Weibull-verdeling. “Tjee, wat ingewikkeld” maakt plaats voor “goh, wat fijn dat anderen het telwerk al voor me hebben uitgevoerd”. Eén opmerking vooraf: de theorie in dit document beperkt zich tot de eerstvolgende storing. Als we meerdere storingen in de tijd willen bekijken komen we terecht in de zogenoemde vernieuwingstheorie. Dat is voor een vervolg.



Inhoud

Voorwoord		3
1	Betrouwbaarheid en afgeleide grootheden	5
1.1	Betrouwbaarheid	5
1.2	Onbetrouwbaarheid of cumulatieve faalkansverdeling	6
1.3	Faalkansverdeling	6
1.4	Faaltempo, hazard rate of conditionele faalkans	6
1.5	Storingsfrequentie	7
1.6	Mean Time To Failure (MTTF)	7
1.7	Mean Time Between Failure (MTBF)	8
1.8	Conditionele betrouwbaarheid	8
2	Faalkansverdelingen	10
2.1	De exponentiële verdeling	10
2.2	De normaalverdeling	14
2.3	De gamma-verdeling	17
2.4	De 2-parameter Weibull-verdeling	21



1 Betrouwbaarheid en afgeleide grootheden

1.1 Betrouwbaarheid

Betrouwbaarheid $R(t)$ is de kans dat een component gedurende een bepaalde tijd blijft doen wat hij moet doen. Je kunt betrouwbaarheid zien als de overleving van een component of de overleving van een populatie van componenten in de tijd.

Stel dat we een populatie hebben van 200 componenten waarvan we weten dat er ieder jaar 20 zullen falen. Na 10 jaar zal de eerste generatie 'overleden' zijn. Het verloop van dit overlijden kunnen we uitzetten in de tijd. Zie hiervoor tabel 1.1. De betrouwbaarheid op een willekeurig tijdstip t is dan gedefinieerd als het aantal componenten dat op t nog in leven is, gedeeld door het totale aantal componenten waarmee we begonnen, in dit voorbeeld 200.

TABEL 1.1 FAALGEDRAG EN FUNCTIES

Tijd	Overleving	Betrouwbaarheid		Onbetrouwbaarheid		Faalkansverdeling		Faaltempo
t	N(t)	R(t)		F(t)		f(t)		z(t)
0	200	1	100%	0	0%	0,1	10%	0,100
1	180	0,9	90%	0,1	10%	0,1	10%	0,111
2	160	0,8	80%	0,2	20%	0,1	10%	0,125
3	140	0,7	70%	0,3	30%	0,1	10%	0,143
4	120	0,6	60%	0,4	40%	0,1	10%	0,167
5	100	0,5	50%	0,5	50%	0,1	10%	0,200
6	80	0,4	40%	0,6	60%	0,1	10%	0,250
7	60	0,3	30%	0,7	70%	0,1	10%	0,333
8	40	0,2	20%	0,8	80%	0,1	10%	0,500
9	20	0,1	10%	0,9	90%	0,1	10%	1,000
10	0	0	0%	1	100%	0,1	10%	-

Betrouwbaarheid is dus een functie in de tijd. In formulevorm:

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)} \quad (1.1)$$

$N(t)$ is het aantal componenten dat nog in leven is op tijdstip t en $N(0)$ is het aantal componenten waarmee we begonnen op $t = 0$.

Op $t = 3$ is de betrouwbaarheid in dit voorbeeld gelijk aan 70%, namelijk $140/200 \times 100\%$. Dit betekent dat de kans dat een component op $t = 3$ nog leeft gelijk is aan 70%.



1.2 Onbetrouwbaarheid of cumulatieve faalkansverdeling

Als de kans dat een component op $t = 3$ nog leeft gelijk is aan 70% dan is er dus 30% kans dat de component ergens tussen $t = 0$ en $t = 3$ overlijdt. Dit laatste noemen we de onbetrouwbaarheid.

Onbetrouwbaarheid drukken we uit in $F(t)$ en is gelijk aan 1 minus $R(t)$. $F(t)$ noemen we ook wel de **cumulatieve faalkansverdeling** of **cumulatieve faalkansdistributie**. In formulevorm:

$$F(t) = 1 - R(t) \quad (1.2)$$

De onbetrouwbaarheid $F(t)$ is een functie in de tijd en opgenomen in tabel 1.1.

1.3 Faalkansverdeling

De volgende afgeleide grootte is de faalkansverdeling. Het aantal componenten dat per tijdseenheid overlijdt ten opzichte van de oorspronkelijke populatie noemen we de faalkans. Ook de faalkans is een functie in de tijd en deze wordt aangeduid met **faalkansverdeling** of **faalkansdistributie**.

$$f(t) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad (1.3)$$

In ons voorbeeld is de faalkans in ieder jaar gelijk. Ieder jaar overlijden 20 componenten van de oorspronkelijke 200 waar we mee begonnen. De kans dat in een willekeurig jaar een component overlijdt is gelijk aan $20/200 \times 100\% = 10\%$. Dit vinden we ook met formule 1.3. Bijvoorbeeld:

$$f(3) = \frac{F(3+1) - F(3)}{4 - 3} = \frac{0,4 - 0,3}{1} = 0,1 = 10\%$$

1.4 Faaltempo, hazard rate of conditionele faalkans

Nu kunnen we ook nog kijken naar het aantal componenten dat overlijdt in een jaar (of tijdseenheid) ten opzichte van het aantal componenten dat aan het begin van dat jaar (of tijdseenheid) nog in leven was. Dit noemen we het faaltempo $z(t)$, ook wel hazard rate of conditionele faalkans genoemd. Deze interpreteren we als volgt: als een component een leeftijd bereikt van t jaar, dan is $z(t)$ de kans dat deze component het komende jaar ($t+1$) komt te overlijden. In formulevorm:

$$z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.4)$$

Merk op dat faaltempo $z(t)$ niet hetzelfde is als faalkans $f(t)$. In ons voorbeeld is $f(t) = 0,1$ en constant omdat ieder jaar 20 componenten van de oorspronkelijke 200 overlijden. Het faaltempo is $z(t) = 0,1 / (1 - F(t))$ en deze is niet constant. Voor een component die de leeftijd van 2 jaar bereikt, is de kans op overlijden tussen het 2e en 3e jaar gelijk aan $0,1 / (1 - 0,2) = 0,125$. Voor een component die een leeftijd van 8 jaar bereikt is de kans op overlijden tussen het 8e en 9e levensjaar gelijk aan $0,1 / (1 - 0,8) = 0,5$. De conditie is dus dat een component op een bepaalde tijd nog in leven is, vandaar ook de naam conditionele faalkans. Dit is goed te begrijpen door je te realiseren dat de kans op overlijden vaak (maar niet altijd) toeneemt als een component ouder wordt. Analoog aan een mensenleven: iemand van 80 jaar heeft meer kans om het volgende jaar te overlijden dan iemand van 20 jaar.



1.5 Storingsfrequentie

We gebruiken het woord faalt tempo en niet storingsfrequentie omdat storingsfrequentie gereserveerd is voor het aantal storingen per tijdseenheid en vaak, maar niet altijd, als een gemiddelde maat over de gehele levensduur van een component of voor een hele populatie wordt beschouwd. De storingsfrequentie duiden we aan met λ en wordt gegeven door:

$$\lambda = \frac{\text{aantal storingen}}{\text{tijdseenheid}} = \frac{1}{MTTF} \quad (1.5)$$

waarbij MTTF staat voor Mean Time To Failure oftewel de gemiddelde tijd tot het overlijden van een component. We kunnen ook zeggen: de gemiddelde tijd tot de eerste storing.

Om λ te bepalen moeten we even scherp zijn. Een veel gemaakte fout is om in dit voorbeeld 200 storingen te delen door de 10 meetjaren wat uitkomt op 20 storingen per jaar. Dit is echter niet de storingsfrequentie omdat de tijdseenheid van alle 200 storingen geen 10 jaar is. De eerste 20 componenten overlijden al in het 1e levensjaar en de laatste 20 in het 10e levensjaar. In ons voorbeeld is de totale tijd tot alle storingen bij elkaar opgeteld geen 10 jaar maar 1000 jaar. λ is dan $200 / 1000 = 0,2$ storingen per jaar.

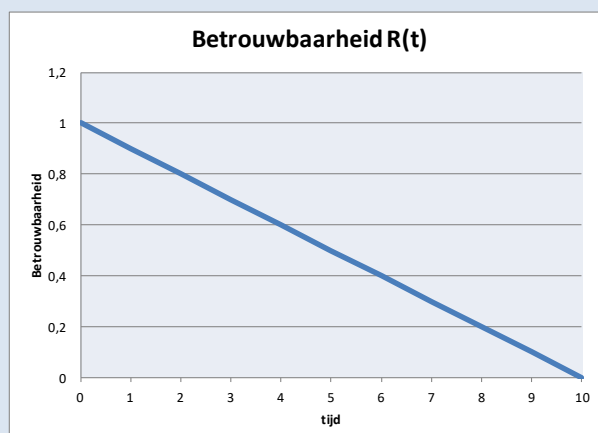
1.6 Mean Time To Failure (MTTF)

De Mean Time To Failure is de gemiddelde tijd tot de eerste en enige storing van een component. λ kunnen we ook vinden door eerst de MTTF te berekenen. De MTTF bepalen we door de oppervlakte onder de grafiek van $R(t)$ te nemen of door de som te nemen van de levensduren maal de faalkansen die horen bij die levensduren. In formulevorm drukken we dit uit met een integraal.

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} t f(t)dt \quad (1.6)$$

In figuur 1.1 hebben we de waarden $R(t)$ uit tabel 1.1 uitgezet in een grafiek. We zoeken nu de oppervlakte onder de blauwe lijn. Het is niet moeilijk om exact de oppervlakte van deze driehoek te bepalen. Deze bedraagt $0,5 \times 10 \times 1 = 5$. De MTTF of de gemiddelde levensduur bedraagt dan 5 jaar. Sommige componenten overlijden al in het 1e levensjaar, anderen pas in het 10e levensjaar, maar gemiddeld genomen worden de componenten 5 jaar oud. De storingsfrequentie $\lambda = 1 / MTTF = 1/5 = 0,2$ storingen per jaar.

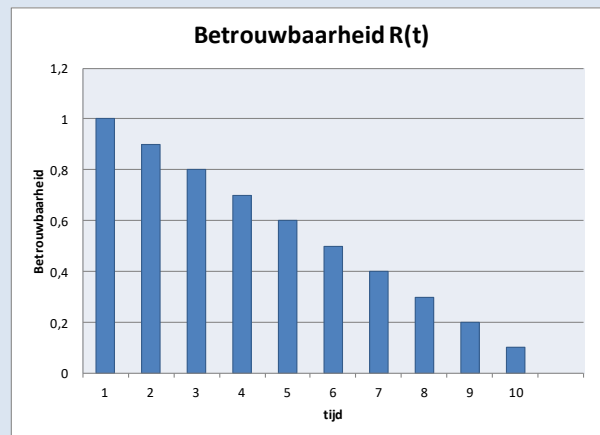
FIGUUR 1.1 BETROUWBAARHEID $R(t)$ UIT HET VOORBEELD IN TABEL 1.1





Bij benadering kunnen we voor het bepalen van de MTTF ook de $R(t)$ waarden uit tabel 1 optellen of $\int_0^{10} f(t)dt$ uitrekenen (ook bij benadering): $1 \times f(1) + 2 \times f(2) + \dots + 10 \times f(10) = 5,5$. We zeggen dan dat $R(t)$ geen continue functie is maar een discrete functie. Dit is grafisch weergegeven in figuur 1.2. Ook nu kunnen we de oppervlakte van de staafjes bepalen, wat neerkomt op de $R(t)$ waarden uit tabel 1.1 optellen. Dit is minder exact dan precies de oppervlakte bepalen in figuur 1.1. Echter in veel situaties wel makkelijker en bij kleine tijdstapjes is de afwijking verwaarloosbaar.

FIGUUR 1.2 BETROUWBAARHEID $R(t)$ VAN HET VOORBEELD IN TABEL 1.1



1.7 Mean Time Between Failure (MTBF)

Naast de MTTF (Mean Time To Failure) bestaat er ook een MTBF (Mean Time Between Failure). Het verschil tussen beiden is dat de MTTF gebruikt wordt voor niet-repareerbare systemen en de MTBF voor repareerbare systemen. Niet-repareerbare systemen kennen maar één storing want daarna is de component overleden. Op dat moment kan je een component vervangen en dan begin je als het ware weer opnieuw met tellen tot je eerste volgende storing. Repareerbare systemen kenmerken zich door meerdere storingen en tussentijdse reparaties. Na een reparatie is de conditie niet noodzakelijkerwijs als nieuw. De gemiddelde tijd tussen reparaties in een bepaalde periode noemen we MTBF.

1.8 Conditionele betrouwbaarheid

Tot slot noemen we de conditionele betrouwbaarheid $R(T|t)$. Dit is de betrouwbaarheid van een component op een tijdstip T gegeven het feit dat deze component al een bepaalde tijd t heeft overleefd.

$$R(t + \Delta t | t) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} \quad (1.7)$$

Stel bijvoorbeeld dat een component uit onze populatie op $t = 5$ nog leeft (de voorwaarde of conditie!). Wat is dan de kans dat deze component op $t = 6$ nog in leven is? Het antwoord is:

$$R(6 | 5) = \frac{R(6)}{R(5)} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 = 80\%$$



Merk op dat dit gelijk is aan 1 minus de hazard rate $z(t = 5)$. We kunnen de conditionele betrouwbaarheid ook over langer periodes bepalen. Stel bijvoorbeeld dat een component uit onze populatie op $t = 6$ nog leeft. Wat is dan de kans dat deze op $t = 9$ nog in leven is? Het antwoord is nu:

$$R(9 | 6) = \frac{R(9)}{R(6)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 = 25\%$$

Met andere woorden: als de component op $t = 6$ nog in leven is, dan is de kans dat deze nog eens drie jaar overleeft gelijk aan 0,25 en de kans dat deze in deze drie jaar overlijdt gelijk aan 0,75.



2 Faalkansverdelingen

In het voorbeeld van tabel 1.1 zijn we uitgegaan van een betrouwbaarheid $R(t)$ die in een constant tempo afneemt. In de praktijk verloopt dit meestal anders. Dit faalgedrag kunnen we meten, in een grafiek uitzetten en vervolgens beschrijven met een functie. Een aantal veel voorkomende functies is:

- de negatief exponentiële verdeling
- de normaalverdeling
- de gamma-verdeling
- de Weibull-verdeling

Deze functies helpen ons om het faalgedrag van componenten te beschrijven.

2.1 De exponentiële verdeling

Een veel voorkomende faalkansverdeling is de (negatief) exponentiële verdeling. Een exponentiële verdeling heeft een constant faaltempo $z(t)$. Technische systemen die zijn opgebouwd uit veel componenten gaan zich vaak gedragen volgens een exponentiële verdeling. Andere voorbeelden zijn componenten waarbij geen sprake is van verbetering of verslechtering van de conditie en het faalgedrag. Dit zien we bij veel componenten in de midden-jaren van hun levensduur. De kans op een lekke band kan ook een voorbeeld zijn van een exponentiële faalkansverdeling, of meldingen die in een bepaalde tijd binnenkomen bij een callcenter.

De betrouwbaarheid van een exponentiële verdeling is als volgt gedefinieerd:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (2.1)$$

De term λ is de storingsfrequentie en deze vinden we door 1 /de gemiddelde tijd tot storing (MTTF) te nemen dus $\lambda = 1/\text{MTTF}$. Voor MTTF mag je ook MTBF invullen als het de tijd tussen storingen betreft (zie paragraaf 1.7).

De cumulatieve faalkans $F(t)$, de faalkansverdeling $f(t)$ en het faaltempo $z(t)$ kunnen we afleiden zoals in hoofdstuk 1 is uitgelegd. Dit kunnen we numeriek oplossen in Excel met de vergelijkingen 1.2, 1.3 en 1.4 mits we de tijdstippen voldoende klein nemen, bijvoorbeeld van 1 tot 100.

Wiskundig zijn de vergelijking al door anderen voor ons afgeleid.

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.2)$$

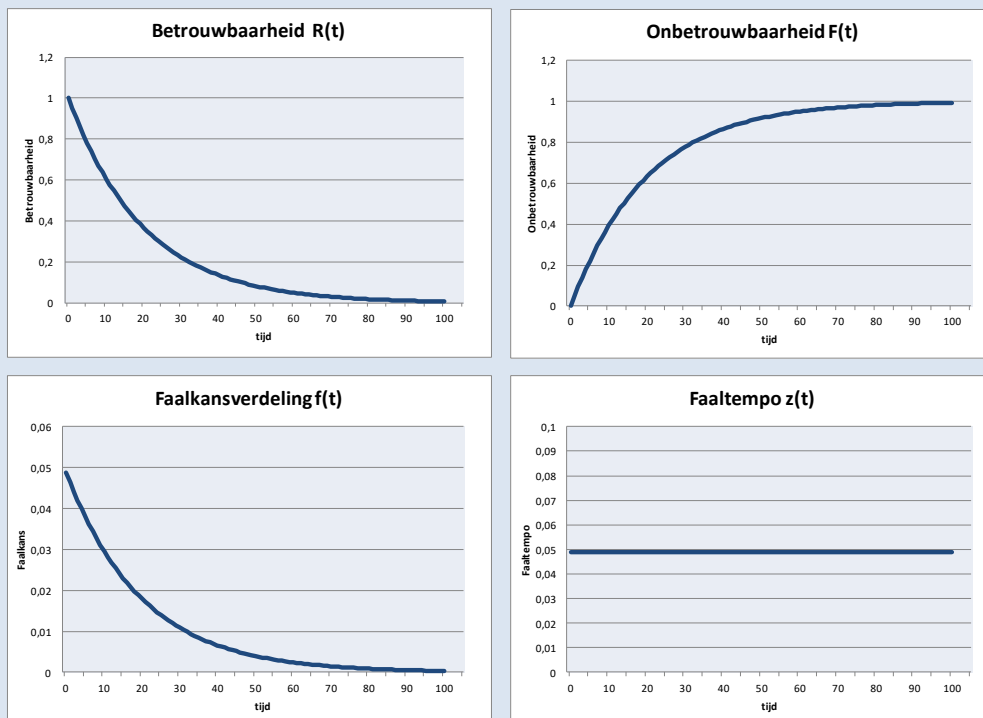
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \lambda R(t) \quad (2.3)$$

$$z(t) = \lambda \quad (2.4)$$

Deze eigenschappen zijn grafisch weergegeven in figuur 2.1. Voor λ is 0,05 per jaar aangenomen. De MTTF is dan 20 jaar.



FIGUUR 2.1 EIGENSCHAPPEN VAN DE NEGATIEF EXPONENTIËLE VERDELING MET $\lambda = 0,05$



Merkt op dat het faalt tempo $z(t)$ een constante is en gelijk aan λ . Dit is een speciale eigenschap van de negatief exponentiële verdeling en een beetje contra-intuïtief. Het betekent dat het faalgedrag geen geheugen heeft. Er is geen sprake van veroudering en leeftijd speelt geen rol voor de conditionele faalkans. Als een component op een willekeurig tijdstip nog leeft, dan is deze op dat moment 'zo goed als nieuw'. De kans dat een component van 10 jaar oud het komend jaar faalt is net zo groot als de kans dat een component van 1 jaar oud het komend jaar faalt. Daarom heeft preventief vervangen bij componenten die een exponentiële faalkansverdeling hebben, weinig zin. Het faalt tempo in een groep is constant maar het falen van individuele componenten is niet voorspelbaar op basis van leeftijd als een component nog leeft. We weten dat een aantal componenten uit de groep in een bepaald jaar zal falen maar weten niet welke.

Voorbeeld 2.1: Preventief vervangen heeft geen zin bij een negatief exponentiële verdeling

We hebben een component met een negatief exponentieel faalpatroon. De MTTF = 10 jaar en $\lambda = 0,1$. De betrouwbaarheid op $t = 5$ jaar bedraagt:

$$R(t = 5) = e^{-0,1 \cdot 5} = 0,6065$$

Stel dat we de betrouwbaarheid willen verhogen door deze component iedere 3 jaar te vervangen. De betrouwbaarheid op $t = 3$ is hoger dan op $t = 5$ want:

$$R(t = 3) = e^{-0,1 \cdot 3} = 0,7408$$

Dit lijkt een logische stap en daar zit het contra-intuïtieve in. Stel dat we de component op $t = 3$ vervangen door een nieuwe. Wat is dan de betrouwbaarheid op $t = 5$? Deze vinden we door $R(t = 3) \cdot R(t = 2)$ te nemen.



$$R(t = 5) = R(t = 3) \cdot R(t = 2) = e^{-0,13} \cdot e^{-0,12} = 0,7408 \cdot 0,8187 = 0,6065$$

Met andere woorden, we hadden deze component net zo goed niet kunnen vervangen. Het preventief vervangen heeft de betrouwbaarheid op $t = 5$ niet verhoogd.

Een andere manier om hier tegenaan te kijken is met de voorwaardelijk kans. Wat is de kans dat een component op $t = 5$ nog leeft gegeven het feit dat deze op $t = 3$ nog leeft? Hiervoor grijpen we terug naar formule 1.7.

$$R(t = 5 | t = 3) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{R(t = 5)}{R(t = 3)} = \frac{0,6065}{0,7408} = 0,8187 = R(t = 2)$$

Dit is gelijk aan het neerzetten van een nieuwe component op $t = 3$ die dan twee jaar later dezelfde betrouwbaarheid heeft. Kortom, het preventief vervangen van componenten met een negatief exponentieel faalpatroon heeft geen zin.

Wat wel zin heeft in deze situatie is toestandsafhankelijk onderhoud mits het faalproces meetbaar is en voldoende lang om te kunnen ingrijpen. Als het proces van falen meetbaar is vanaf een punt waarop het falen begint tot een punt waarbij er verlies van functie optreedt, kan met periodieke inspectie en preventief ingrijpen falen worden voorkomen.

Voorbeeld 2.2: Transformator

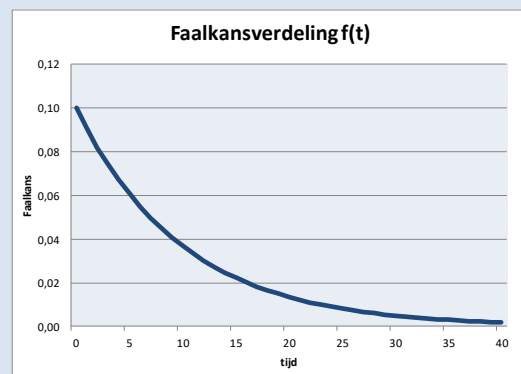
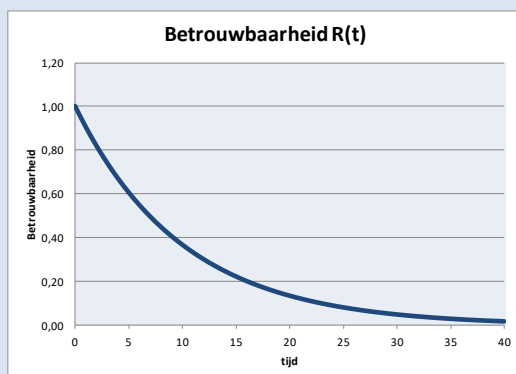
Een transformator heeft een negatief exponentieel faalpatroon. Volgens opgave van de fabrikant bedraagt de MTTF 10 jaar.

- Wat is de betrouwbaarheid van de transformator op $t = 5$ jaar?
- Wat is de faalkans op $t = 5$ jaar?
- We zijn 5 jaar verder. De transformator heeft nog niet gefaald. Wat is de kans dat de transformator het komende jaar faalt?

In Excel maken we eerst een overzicht van $R(t)$ en $f(t)$.

- $R(t)$ vinden we met de snel formule = 1-EXPON.VERD(t , λ , WAAR)
- $f(t)$ vinden we met de snel formule = EXPON.VERD(t , λ , ONWAAR)

Je kunt natuurlijk ook formules 2.1 en 2.3 gebruiken.





Negatief exponentiële verdeling
MTTF = 10 jaar

t	R(t)	f(t)	t	R(t)	f(t)
0	1,00	0,10	20	0,14	0,01
1	0,90	0,09	21	0,12	0,01
2	0,82	0,08	22	0,11	0,01
3	0,74	0,07	23	0,10	0,01
4	0,67	0,07	24	0,09	0,01
5	0,61	0,06	25	0,08	0,01
6	0,55	0,05	26	0,07	0,01
7	0,50	0,05	27	0,07	0,01
8	0,45	0,04	28	0,06	0,01
9	0,41	0,04	29	0,06	0,01
10	0,37	0,04	30	0,05	0,00
11	0,33	0,03	31	0,05	0,00
12	0,30	0,03	32	0,04	0,00
13	0,27	0,03	33	0,04	0,00
14	0,25	0,02	34	0,03	0,00
15	0,22	0,02	35	0,03	0,00
16	0,20	0,02	36	0,03	0,00
17	0,18	0,02	37	0,02	0,00
18	0,17	0,02	38	0,02	0,00
19	0,15	0,01	39	0,02	0,00

Antwoord a)

We lezen af in de tabel: de betrouwbaarheid $R(t)$ op $t = 5$ is 0,61 of 61%.

Alternatief:

$$R(t = 5) = e^{-0,15} = 0,606 = 61\%$$

Antwoord b)

We lezen af in de tabel: de faalkans $f(t)$ op $t = 5$ is 0,06 per jaar

Alternatief:

$$f(t = 5) = \lambda e^{-\lambda t} = 0,1 \cdot e^{-0,15} = 0,0607$$

Antwoord c)

De negatief exponentiële verdeling heeft geen geheugen. Dit betekent dat wanneer de transformator tot $t = 5$ niet gefaald heeft, deze op $t = 5$ zo goed als nieuw is. De kans dat de transformator het komende jaar faalt is $z(t = 5)$.



$$z(t = 5) = \lambda = 0,1$$

Dit kunnen we ook herleiden uit:

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \text{ voor iedere } t.$$

2.2 De normaalverdeling

De normaalverdeling is een faalpatroon dat van nature veel voorkomt. De slijtage van componenten of de levensduur van gloeilampen worden vaak met een normaalverdeling beschreven.

De wiskundige vergelijkingen zijn lastig maar ook hier kun je goed uit de voeten met de aanpak beschreven in hoofdstuk 1 en met gebruik van Excel.

Mathematisch:

$$R(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2.5)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.7)$$

$$z(t) = \frac{e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^{\infty} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt} \quad (2.8)$$

De parameter μ is het gemiddelde of de MTTF en de parameter σ is een maat voor de spreiding rond het gemiddelde. σ noemen we de standaardafwijking. Met σ kunnen we de vorm (de hoogte en breedte) van de faalkansverdeling $f(t)$ modelleren. Ongeveer 68% van alle faalgebeurtenissen valt binnen een tijd van $-\sigma$ en $+\sigma$ rond de MTTF. Als bijvoorbeeld de MTTF van een populatie lampjes 5 jaar is, en $\sigma = 2$ dan betekent dit dat tussen 3 en 7 jaar 68% van de lampjes zal falen.

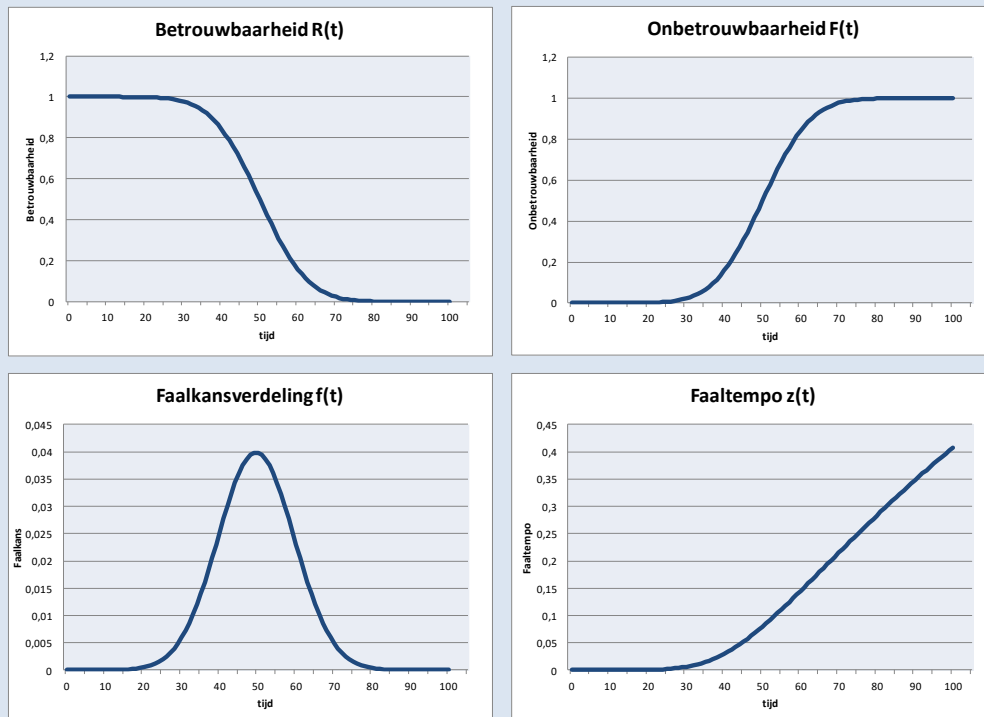
De faalkansverdeling $f(t)$ in formule 2.7 kunnen we vrij eenvoudig wiskundig in Excel uitschrijven in de tijd. Als we $f(t)$ hebben kunnen we numeriek $R(t)$, $F(t)$ en $z(t)$ bepalen met de aanpak uit hoofdstuk 1 mits we voldoende kleine tijdstappen nemen. Excel heeft ook snelformules voor $F(t)$ en $f(t)$. Deze vinden we onder NORM.VERD(t,



μ , σ , cumulatief). Als we bij cumulatief 'WAAR' invullen krijgen we $F(t)$, de cumulatieve faalkansverdeling. Als we bij cumulatief 'ONWAAR' invullen krijgen we $f(t)$, de faalkansverdeling.

Grafisch zijn de eigenschappen van de normaalverdeling weergegeven in figuur 2.2.

FIGUUR 2.2 EIGENSCHAPPEN VAN DE NORMAALVERDELING MET $\mu = 50$ EN $\sigma = 10$



Een eigenschap van de normaalverdeling is dat de faalkansverdeling $f(t)$ symmetrisch is. Verder zien we dat het faaltempo stijgt in de tijd. Dit wil zeggen dat er sprake is van veroudering. Een component die een leeftijd van bijvoorbeeld 50 jaar bereikt heeft een hogere kans van overlijden dan eenzelfde component van 10 jaar oud.

Voorbeeld 2.3: Toepassing normaalverdeling

Het faalpatroon van lantarenpalen volgt een normaalverdeling met een gemiddelde leeftijd μ van 10 jaar en een spreiding σ van 2 jaar. Dit laatste betekent dat ongeveer 68% van de lampen faalt tussen $t = 8$ jaar en $t = 12$ jaar.

- Wat is de betrouwbaarheid van een lamp op $t=10$ jaar?
- Laat zien dat circa 68% van de faalgebeurtenissen optreedt tussen $t=8$ en $t = 12$ jaar.
- Wat is de kans dat een lantarenpaal faalt voor de leeftijd van 5 jaar?
- Wat is de kans dat een lantarenpaal 15 jaar of langer functioneert?
- Als een lantarenpaal op $t = 10$ nog functioneert, wat is dan de kans dat deze op $t = 15$ jaar nog steeds functioneert?



Normaalverdeling

μ	10	jaar		
σ	2	Jaar		
	R(t)	F(t)	f(t)	z(t)
0	1,000	0,000	0,000	0,000
1	1,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	0,000	0,000	0,000
3	1,000	0,000	0,001	0,001
4	0,999	0,001	0,005	0,005
5	0,994	0,006	0,017	0,017
6	0,977	0,023	0,044	0,045
7	0,933	0,067	0,092	0,098
8	0,841	0,159	0,150	0,178
9	0,691	0,309	0,191	0,277
10	0,500	0,500	0,191	0,383
11	0,309	0,691	0,150	0,486
12	0,159	0,841	0,092	0,579
13	0,067	0,933	0,044	0,659
14	0,023	0,977	0,017	0,727
15	0,006	0,994	0,005	0,783
16	0,001	0,999	0,001	0,828
17	0,000	1,000	0,000	0,864
18	0,000	1,000	0,000	0,893
19	0,000	1,000	0,000	0,916
20	0,000	1,000	-	-

In Excel maken we een tabel en grafiek van de normaalverdeling met de gegeven parameters μ en σ .

- $F(t)$ vinden we met =NORM.VERD($t, \mu, \sigma, \text{WAAR}$)
- $f(t)$ benaderen we numeriek met $F(t+1) - F(t)$ volgens formule 1.3
Als we meer exact willen werken nemen we =NORM.VERD($t, \mu, \sigma, \text{ONWAAR}$)
- $R(t) = 1 - F(t)$
- $z(t)$ benaderen we numeriek met $f(t)/R(t)$; zie formule 1.4

Antwoord a)

De betrouwbaarheid van de lamp op $t=10$ lezen we af in de tabel. $R(t=10) = 0,5$.

Antwoord b)

We tellen de faalkansen $f(t)$ van $t = 8$ tot $t = 12$ bij elkaar op:
 $0,150 + 0,191 + 0,191 + 0,150 = 0,68$.

Antwoord c)

De kans dat een lantaarnpaal faalt voor $t=5$ is $F(t=5) = 0,006$.
We vinden deze waarde ook door $f(t)$ van $t=0$ tot $t=5$ te nemen:
 $0 + 0 + 0 + 0,001 + 0,005 = 0,006$.

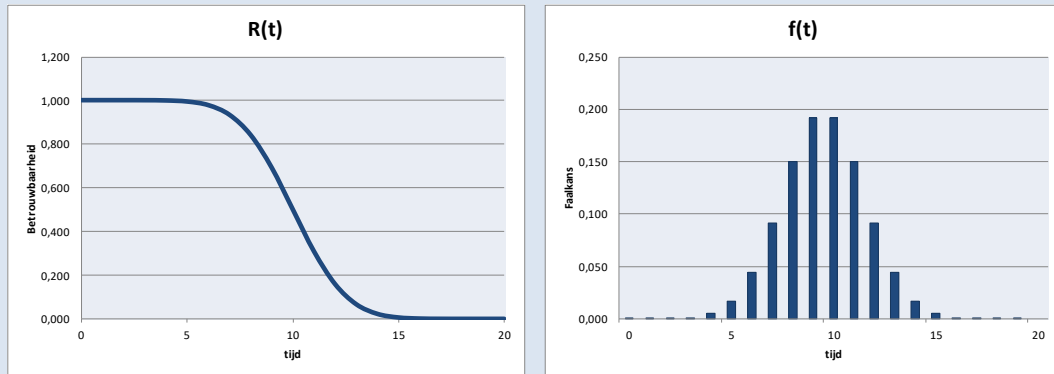


Antwoord d)

De kans dat een lantarenpaal 15 jaar of langer functioneert is de som van de $f(t)$'s vanaf $t = 15$: $0,005 + 0,001 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,006$. Dit is gelijk aan $R(t=15) = 0,006$.

Antwoord e)

De kans dat een lantarenpaal op $t = 15$ nog functioneert als gegeven is dat deze op $t = 10$ nog niet heeft gefaald berekenen we volgens $R(t=15 | t=10) = R(t=15) / R(t=10) = 0,006 / 0,5 = 0,012$.



2.3 De gamma-verdeling

Voor de volledigheid beschrijven de gamma-verdeling. Deze verdeling heeft wiskundige eigenschappen die bij de vervangingstheorie van pas komen. Deze vervangingstheorie behandelen we niet in dit document.

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.9)$$

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{(\lambda t)^{k-1} \lambda e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} dt \quad (2.10)$$

λ is de locatieparameter, k is de vormparameter en $\Gamma(k)$ is een functie, de gamma-functie, die beschreven wordt door:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} (\lambda t)^{k-1} \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (2.11)$$

Dit ziet er ingewikkelder uit dan het is. De integraal is goed numeriek op te lossen in Excel. Bovendien geldt dat wanneer k een geheel getal is en groter dan nul, dat $\Gamma(k) = (k - 1)!$

Het uitroepteken staat voor het wiskundige symbool faculteit. $5!$ is bijvoorbeeld $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

De gemiddelde levensduur MTTF = k/λ . Als $k = 1$ dan wordt de MTTF gelijk aan $1/\lambda$ en de gamma-verdeling wordt een exponentiële verdeling.

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1} \lambda e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} \quad (2.12)$$



De hazard rate vinden we via:

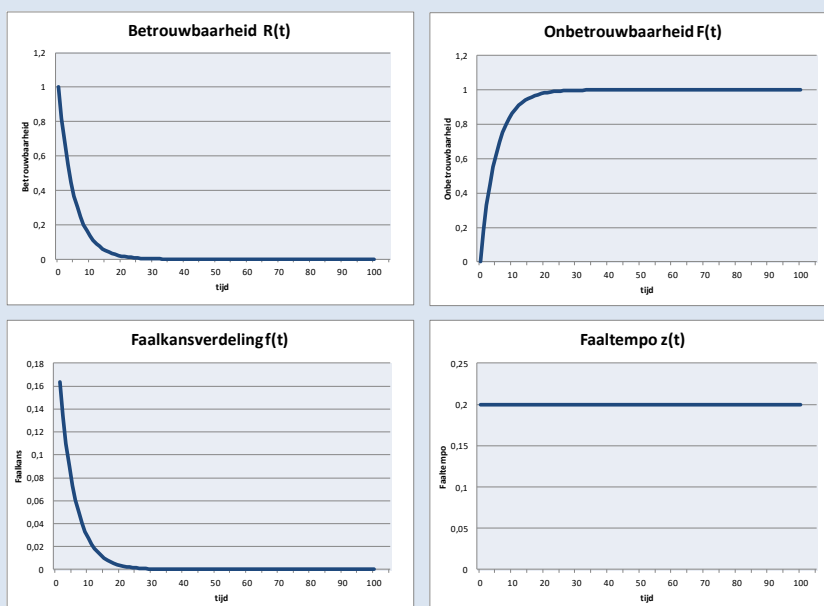
$$z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.4)$$

Excel heeft een snelfunctie voor de gamma-verdeling: GAMMA.VERD(x, alpha; bèta; cumulatief). Voor alpha vul je k in en voor bèta $1/\lambda$. Als je voor cumulatief 'waar' invult krijg je $F(t)$. Als je voor cumulatief 'onwaar' invult krijg je $f(t)$. Om geen vergissingen te maken adviseren we om ook de formule 2.12 in Excel toe te passen voor gehele getallen van k en uitkomsten te controleren.

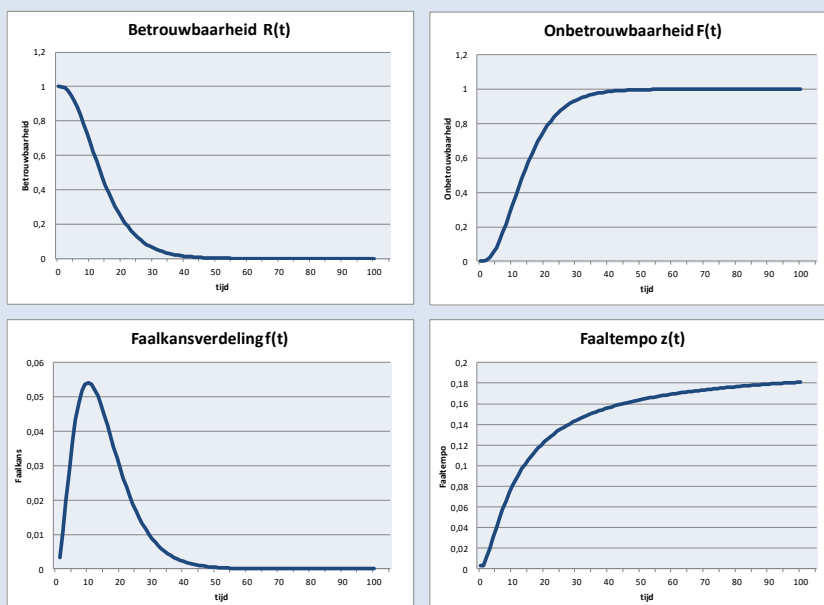
De eigenschappen van de gamma-verdeling zijn voor een aantal combinaties van k en λ weergegeven in figuren 2.3 t/m 2.6.



FIGUUR 2.3 EIGENSCHAPPEN VAN DE GAMMA-VERDELING MET $k = 1$ en $\lambda = 0,2$

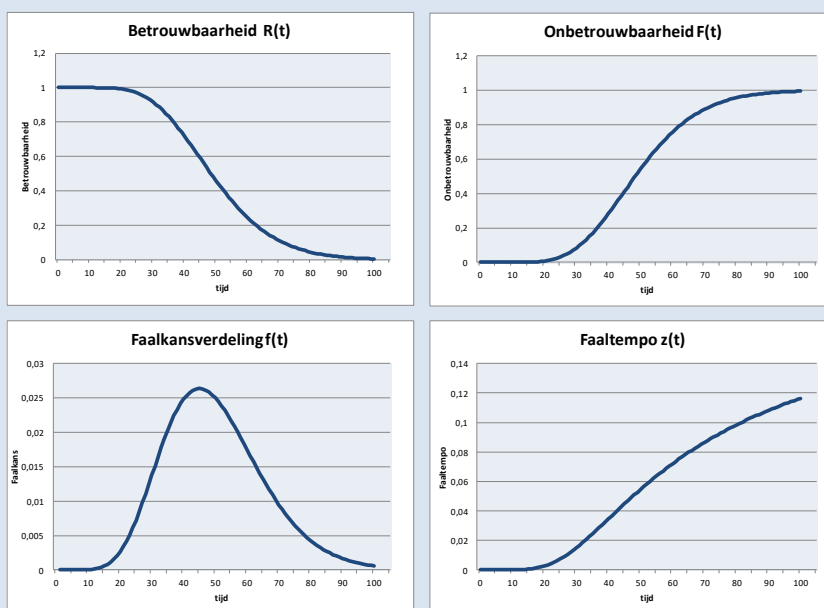


FIGUUR 2.4 EIGENSCHAPPEN VAN DE GAMMA-VERDELING MET $k = 3$ en $\lambda = 0,2$

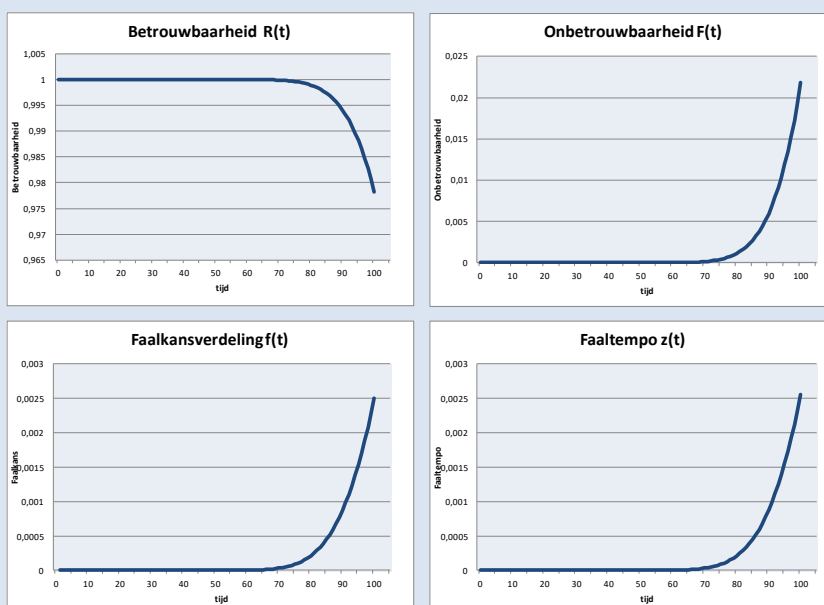




FIGUUR 2.5 EIGENSCHAPPEN VAN DE GAMMA-VERDELING MET $k = 10$ en $\lambda = 0,2$



FIGUUR 2.6 EIGENSCHAPPEN VAN DE GAMMA-VERDELING MET $k = 30$ en $\lambda = 0,2$





2.4 De 2-parameter Weibull-verdeling

De 2-parameter Weibull-verdeling wordt ook vaak gebruikt om faalgedrag van componenten te beschrijven. De reden is dat de Weibull-verdeling erg flexibel is en handige wiskundige eigenschappen kent die in de vervangingstheorie van pas komen.

$$R(t) = e^{-bt^a} \quad (2.13)$$

b wordt de locatieparameter genoemd en a de vormparameter.

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-bt^a} \quad (2.14)$$

$$f(t) = b \cdot a \cdot t^{a-1} \cdot e^{-bt^a} \quad (2.15)$$

De hazard rate vinden we via:

$$z(t) = b \cdot a \cdot t^{a-1} \quad (2.16)$$

De snelformule in Excel voor de Weibull-verdeling is: WEIBULL(x, α, β, cumulatief)

Voor α vullen we a in en voor β vullen we 1/b in. Als we voor cumulatief 'waar' invullen krijgen we F(t) en als we voor cumulatief 'onwaar' invullen krijgen we f(t). Ook hier geldt dat je je snel kunt vergissen in de parameters. Daarom adviseren we om in Excel enkele controles uit te voeren op basis van één van de formules 2.13 t/m 2.16.

Merk op dat wanneer de vormparameter a gelijk is aan 1 dat de Weibull-verdeling dan gelijk is aan een exponentiële verdeling.

De gemiddelde levensduur van een Weibull-verdeling wordt gegeven door:

$$MTTF = \left(\frac{1}{b}\right)^{a-1} \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \quad (2.17)$$

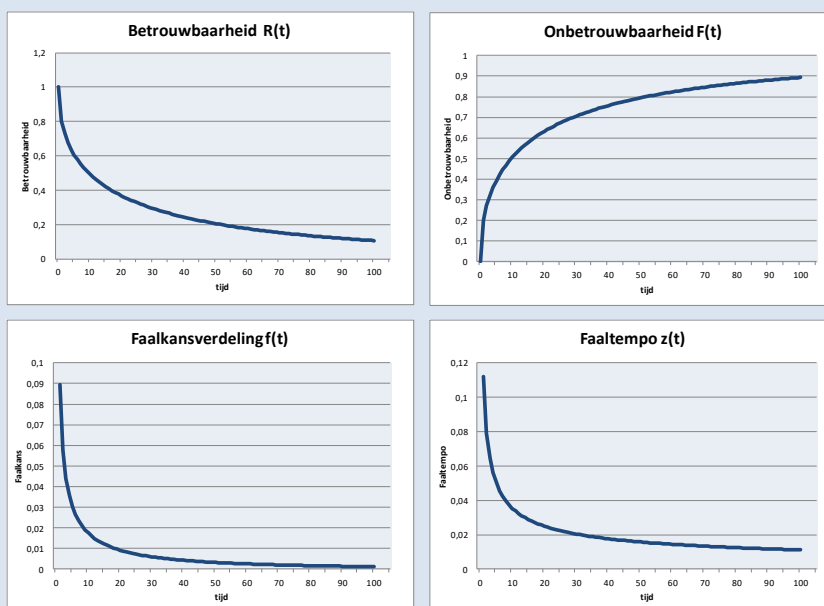
Het symbool Γ staat voor de gamma-functie (vergelijking 2.11). Voor a = 1 is de MTTF handmatig te bepalen. Met verwijzing naar figuur 2.8, met a = 1 en b = 0,05, geldt $\Gamma(2) = (2 - 1)!$ en dus:

$$MTTF = \left(\frac{1}{0,05}\right)^{1-1} \Gamma\left(\frac{1}{1} + 1\right) = \left(\frac{1}{0,05}\right) \Gamma(2) = \left(\frac{1}{0,05}\right) \cdot (2 - 1)! = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ jaar}$$

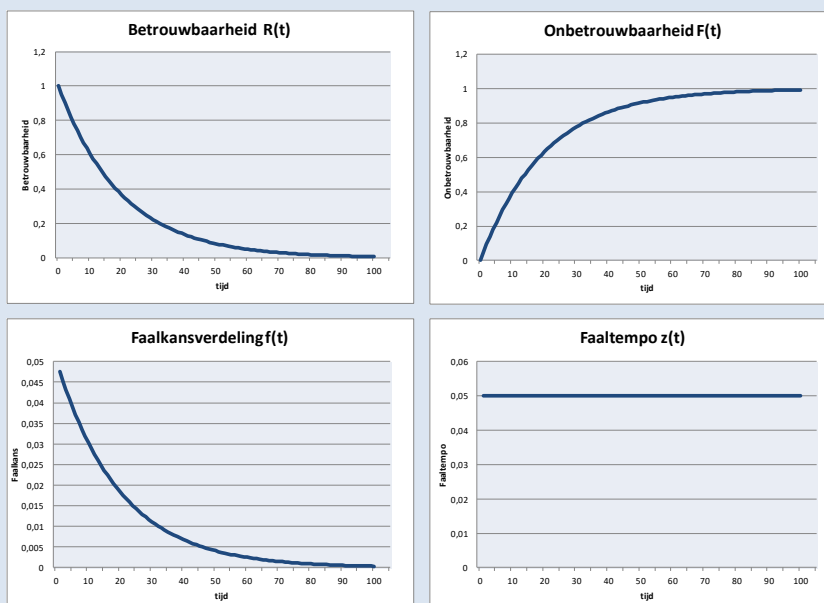
z(t) is dan 1/20 = 0,05. Dit zien we in de grafiek z(t) van figuur 2.8.



FIGUUR 2.7 EIGENSCHAPPEN VAN DE WEIBULL-VERDELING MET $a = 0,5$ en $b = 0,05$

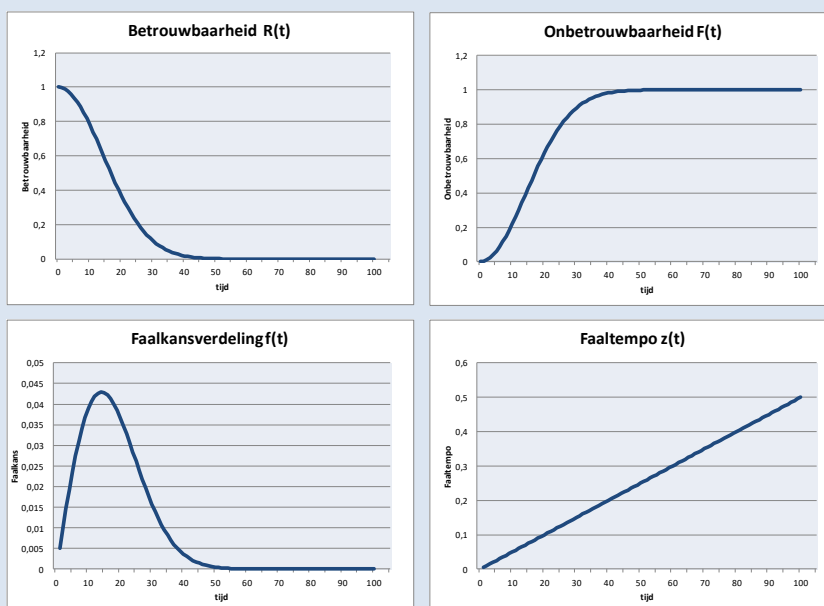


FIGUUR 2.8 EIGENSCHAPPEN VAN DE WEIBULL-VERDELING MET $a = 1$ en $b = 0,05$





FIGUUR 2.9 EIGENSCHAPPEN VAN DE WEIBULL-VERDELING MET $a = 2$ en $b = 0,05$



FIGUUR 2.10 EIGENSCHAPPEN VAN DE WEIBULL-VERDELING MET $a = 3$ en $b = 0,02$

